V FICE 11 e 12 de setembro de 2014
Feira de Iniciação Científica e Extensão

UMA PROVA DA IRRACIONALIDADE $\sqrt{2}$ VIA TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Pesquisa em andamento

Rafaela Filippozzi[1] *Luiz Rafael dos Santos*[2]

RESUMO

Este trabalho é parte inicial de um projeto de Iniciação Científica que tem como objetivo estudar as demonstrações e a teoria sobre a existência de números não-racionais, em particular, através do estudo das várias demonstrações de que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Define-se número racional como sendo aquele que pode ser escrito na forma $\frac{m}{n}$ em que $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Pergunta-se se existe racional que seja a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Para responder esta pergunta usamos o número $\sqrt{2}$. A ideia de que existem números que não são racionais é de fundamental importância na construção da Álgebra, Análise e Geometria. Aqui apresentaremos e provaremos a irracionalidade de $\sqrt{2}$ via Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Sendo assim, primeiramente demonstramos o TFA para depois provar a existência da irracionalidade, tanto demonstrando a irracionalidade de $\sqrt{2}$ quanto de $\sqrt{p}$ para um número p primo qualquer.

Palavras-chave: Números Irracionais. Teorema Fundamental da Aritmética. Números primos.

INTRODUÇÃO

A construção dos números naturais – ou até dos números inteiros –, é fácil no ponto de vista intuitivo, já que tal abstração surge a partir do processo de contagem de coleções finitas de objetos. Entretanto, as necessidades da vida diária requerem, além da contagem de objetos discretos, a medição de quantidades como comprimento, peso, altura, entre outros.

Para satisfazer mais necessidades, criou-se a necessidade de números racionais, que são aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{m}{n}$ em que m,n e $n \neq 0$. Desde a Escola

[1] Estudante da Licenciatura em Matemática do IFC/Camboriú. Email: <rafaela.filippozzi@gmail.com>
[2] Orientador e Professor do IFC/Camboriú. Email: <lrsantos@ifc-camboriu.edu.br>

Pitagórica, acreditava-se que todos os números poderiam se expressados como número racional.

Porém Hipasius Metapotum (470 a.C.), um dos adeptos da Escola Pitagórica, teria descoberto a existência de números que não eram racionais, os chamados de números incomensuráveis. Para isso, ele mostrou que não existe racional que seja a medida da diagonal de um quadrado de lado 1. Tal descoberta provocou rebuliço na escola, já que todas as proposições pitagóricas somente valiam para números comensuráveis (EVES, 2004).

Por algum tempo o único valor incomensurável conhecido foi $\sqrt{2}$, o valor da diagonal do quadrado de lado 1. Porém mais tarde, Teodoro de Cirene (426 a.C) também provou, de forma geométrica, a existência de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$. Assim, novos números tiveram que ser *inventados* de modo a serem associados a essas grandezas. Esses números foram chamados de irracionais e a sua existência foi passada aos dias atuais através da demonstração feita pelo matemático grego Eudoxo, que aparece no quinto livro dos Elementos de Euclides (BOYER, 2010).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Recentemente, na VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Chaves e Freitas (2012) resumiram seis demonstrações de que $\sqrt{2}$ era irracional em um minicurso, verificando tal afirmação das seguintes maneiras:

1. prova via Teorema Fundamental da Aritmética
2. prova via frações irredutíveis
3. prova via princípio da boa ordenação
4. prova geométrica
5. prova analítica
6. prova via frações contínuas

Neste sentido, foi criado um projeto de Iniciação Científica, cujo objetivo consiste no estudo e aprofundamento de toda a matemática e da história da matemática envolvida nas seis diferentes provas descritas por acima de que $\sqrt{2}$ é irracional, redemonstrando detalhadamente e com entendimento das técnicas de demonstração envolvidas nessas provas.

Neste trabalho, mostramos a primeira parte do projeto, na qual explanamos a demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional, utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética. Salientamos que esse é um teorema muito importante e bastante utilizado, porém muitas vezes sua demonstração só é vista em estudos mais avançados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para demonstrar que $\sqrt{2}$ é irracional, via Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), é importante como preliminares matemáticas, estabelecermos o conceito de número primo e de número composto. Após isso, seguimos com a demonstração o TFA e por fim mostraremos que $\sqrt{2}$ não pode ser um número racional. Baseamo-nos aqui nos textos de Santos (2012) e Moreira, Martínez e Saldanha (2012).

Definição 1. Um número inteiro positivo p, com p $\neq 1$, é denominado *primo* se os únicos divisores não negativos são 1 e p.

Denotaremos por $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$ o conjunto dos números primos.

Definição 2. Um número natural é *composto* quando tem mais de dois divisores naturais distintos.

Convém lembrar aqui que tanto o conjunto dos números primos quanto o dos números compostos são infinitos. Os números primos consistem o alicerce dos demais números inteiros positivos, visto que qualquer inteiro positivo pode ser escrito de maneira única, a menos da ordem, como um produto de números primos. Esse resultado é formalizado por meio do Teorema Fundamental da Aritmética, que foi exposto pela primeira vez no livro IX dos Elementos de Euclides (BOYER, 2010). A seguir enunciaremos e demonstraremos tal teorema.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** *Todo número inteiro maior que 1, pode ser representado de maneira única como um produto de fatores primos.*

Demonstração. Seja $n > 1$ um número natural. Então n pode ser primo ou composto.

Se n for primo a sua fatoração será n, na medida que um número primo só pode ser dividido por 1 e por si mesmo. Se n for composto, seja $p_1 > 1$ o menor dos divisores positivos de n. Então p_1 é primo, caso contrário existiria $p < p_1$ tal que p_1 seria divisível por p, a afirmação que p_1 é o menor dos divisores positivos.

Logo $n = p_1 n_1$, com $n_1 \geqslant p_1$.

No caso de n_1 ser primo, então n será representado pelo produto de primos como queriamos demonstrar.

Por outro lado, caso n_1 seja composto, teremos p_2 como menor divisor de n_1 e analogamente a p_1, p_2 será primo além disso $n = p_1 p_2 n_2$ em que $n_2 \geqslant p_2$. Esse processo poderá se repetir, porém não infinitamente, na medida em que $n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots > 1$.

Digamos então, sem perda de generalidade, que seja possível encontrar k termos primos na composição de n, assim:

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k},$$

em que cada a_i, para $i = 1, \dots, k$ é o número de vezes que n é dividido por aquele primos. Desta forma, mostramos que é possível decompor n em fatores primos.

Falta apenas demonstrar a unicidade da decomposição, a qual feita por indução.

Suponho $n = 2$, existe uma única maneira de fatorar 2 em números primos. Suponha agora como hipótese de indução que todos os números inteiros maiores que 1 e menores que n irão ter uma única fatoração.

Por contradição vamos supor que n é composto e tem duas fatorações distintas:

$$n = p_1 p_2 \dots p_k = q_1 q_2 \dots q_s. \tag{1}$$

Portanto,

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_k}{q_1 q_2 \dots q_s} = 1.$$

Note que cada q_j, $j = 1, \dots, s$ e p_i, $i = 1, \dots, k$ são primos. Além disso, q_1 divide um dos fatores p_i, isto é, $p_i / q_1 = 1$, para algum $i = 1, \dots, k$.

Vamos supor, por conta da propriedade comutativa, que $i = 1$. Daí $\dfrac{p_1}{q_1} = 1$ e como ambos são primos, temos que $p_1 = q_1$.

Assim, por conta da equação (1)

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \dots p_k = q_2 \dots q_s.$$

Note que

$$1 < \frac{n}{p_1} < n.$$

Portanto usando a hipótese de indução, $\dfrac{n}{p_1}$ tem uma única fatoração. Assim

$$p_2 \dots p_k = q_2 \dots q_s$$

e como $p_1 = q_1$ segue que $p_k = q_s$. Neste caso as duas fatorações são idênticas, possivelmente variando a ordem.

$\square$

Agora que o Teorema Fundamental da Aritmética está provado, mostraremos, usando tal fato, a prova de que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Número racional é todo aquele número que pode ser escrito na forma $\dfrac{m}{n}$ em que $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. Com isso em mente podemos enunciar e demonstrar o seguinte teorema

Teorema 2. *$\sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração. Suponha $\sqrt{2}$ um número racional, por contradição. Dessa forma, temos que existem a e b inteiros, com b não nulo, tais que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Elevando ao quadrado ambos os termos temos que

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2. \tag{2}$$

Por virtude do Teorema 1

$$a = a_1 a_2 a_3 \cdots a_m \text{ e } b = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n. \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2) temos:

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots a_m^2 = 2 b_1^2 b_2^2 b_3^2 \ldots b_n^2 \tag{4}$$

Observando a equação (4), vemos que o fator 2 aparece um número par de vezes no lado esquerdo e um número ímpar de vezes no lado direito, o que contradiz o Teorema 1, de que um número só pode ter uma única fatoração, com exceção da ordem. Por conta desse absurdo, segue que $\sqrt{2}$ é um número irracional. $\square$

A extensão desse resultado para qualquer p primo é demonstrada de maneira similar. É o que fazemos no teorema que segue.

Teorema 3. *Se p é um número primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição que $\sqrt{p}$ com p sendo um número primo, seja racional. Então existem a e b inteiros com b não nulo, tais que

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}. \tag{5}$$

Elevando (5) ao quadrado, obtemos

$$p = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow a^2 = pb^2. \tag{6}$$

Sejam a decomposição em fatores primos de a e b, respectivamente:

$$a = a_1 a_2 a_3 \ldots a_m \text{ e } b = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n. \tag{7}$$

Substituindo (7) em (6), encontraremos

$$a_1^2a_2^2a_3^2\dots a_m^2 = pb_1^2b_2^2b_3^2\dots b_n^2. \tag{8}$$

Observando a equação (8) vemos que o fator p aparece um número par de vezes no lado esquerdo e um número impar de vezes no lado direito, o que contradiz o Teorema 1 de que um número só pode ter uma única fatoração, com exceção da ordem. Portanto $\sqrt{p}$ é um número irracional. $\square$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por muito tempo o filósofo Hípaso de Metaponto tentou provar que $\sqrt{2}$ era um número irracional. Porém, Hípaso era participante da escola Pitagórica, escola filosófica que acreditavam que toda geometria poderia ser descrita apenas com números racionais. Dessa maneira, se o que Hípaso falava fosse verdade, tudo que se havia construído sob essa hipótese seria falso.

Mesmo assim, Hípaso de Metaponto quebrou a regra de silêncio dos pitagóricos, revelando ao mundo a existência destes *novos* números. Por fim decidiram expulsá-lo e matá-lo, no entanto há diversos mitos sobre o que realmente aconteceu com Hípaso e não se sabe realmente o que podemos tomar como verdade.

Contudo, com a primeira parte deste projeto de Iniciação Científica, provamos que Hípaso falava a verdade, na medida que demonstramos, utilizando o Teorema fundamental da Aritmética, a irracionalidade de $\sqrt{2}$, estendendo essa demonstração para mostrar que $\sqrt{p}$ é irracional, para todo número p primo.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

CHAVES, A. P. d. A.; FREITAS, T. P. d. A. **Seis maneiras de salvar Hipasus da morte**: a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2012. (VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática – Notas de minicurso).

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

MOREIRA, C. G. T. A.; MARTÍNEZ, F. E. B.; SALDANHA, N. C. **Tópicos de teoria dos números**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, J. P. d. O. **Introdução à teoria dos números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.